第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷

参考答案及评分标准

（非数学类，2010）

一（本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）、计算下列各题（要求写出重要步骤）.

(1) 设 $x_n=(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中$|a|<1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 将x_n 恒等变形

$$x_n=(1-a)(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\frac{1}{1-a}=(1-a^2)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\frac{1}{1-a}$$

$$=(1-a^4)\cdot(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})\frac{1}{1-a}=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a},$$

由于$|a|<1$，可知$\lim\limits_{n\to\infty}a^{2^n}=0$，从而

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{1-a}.$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{x}\right)^{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}e^{-x}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x e^{-1}\right]^x$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right]x\right)=\exp\left(\lim_{x\to\infty}x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to\infty}x\left[x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)-1\right]\right)=e^{-\frac{1}{2}}.$$

(3) 设$s>0$，求$I_n=\int_0^{+\infty}e^{-sx}x^n dx\ (n=1,2,\cdots)$.

解 因为$s>0$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-sx}x^n=0$，所以，

$$I_n=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}x^n de^{-sx}=-\frac{1}{s}\left[x^n e^{-sx}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-sx}dx^n\right]=\frac{n}{s}I_{n-1}$$

由此得到，$I_n=\frac{n}{s}I_{n-1}=\frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}I_{n-2}=\cdots=\frac{n!}{s^n}I_0=\frac{n!}{s^{n+1}}$

(4) 设函数$f(t)$有二阶连续的导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f(\frac{1}{r})$，求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解 因为$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$，所以

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}f'(\frac{1}{r})，\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^6}f''(\frac{1}{r})+\frac{2x^2-y^2}{r^5}f'(\frac{1}{r}).$$

利用对称性，$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{r^4}f''(\frac{1}{r})+\frac{1}{r^3}f'(\frac{1}{r})$

(5) 求直线$l_1:\begin{cases}x-y=0\\ z=0\end{cases}$ 与直线$l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$的距离.

解 直线l_1的对称式方程为$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$. 记两直线的方向向量分别为

$\vec{l_1}=(1,1,0)$，$\vec{l_2}=(4,-2,-1)$，两直线上的定点分别为$P_1(0,0,0)$和$P_2(2,1,3)$，

$\vec{a}=\overline{P_1P_2}=(2,1,3)$.

$\vec{l_1}\times\vec{l_2}=(-1,1,-6)$. 由向量的性质可知，两直线的距离

$$d=\left|\frac{\vec{a}\cdot(\vec{l_1}\times\vec{l_2})}{\left|\vec{l_1}\times\vec{l_2}\right|}\right|=\frac{|-2+1-18|}{\sqrt{1+1+36}}=\frac{19}{\sqrt{38}}=\sqrt{\frac{19}{2}}$$

二（本题共 15 分）、 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数，并且

$f''(x)>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$， $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$， 且存在一点$x_0$，使得$f(x_0)<0$.

证明：方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$恰有两个实根.

证 1. 由$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\alpha>0$必有一个充分大的$a>x_0$，使得$f'(a)>0$.

$f''(x)>0$知$y=f(x)$是凹函数，从而$f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)\quad(x>a)$

当$x\to+\infty$时，$f(+\infty)+f'(a)(x-a)\to+\infty$.

故存在$b>a$，使得

$f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)>0$ .... （6 分）

同样，由 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$，必有 $c<x_0$，使得 $f'(c)<0$.

$f''(x)>0$ 知 $y=f(x)$ 是凹函数，从而 $f(x)>f(c)+f'(c)(x-c)\quad (x<c)$

当 $x\to-\infty$ 时，$f(-\infty)+f'(c)(x-c)\to+\infty$.

故存在 $d<c$，使得

$f(d)>f(c)+f'(c)(d-c)>0$ .... （10 分）

在 $[x_0,b]$ 和 $[d,x_0]$ 利用零点定理，$\exists x_1\in(x_0,b)$，$x_2\in(d,x_0)$ 使得

$f(x_1)=f(x_2)=0$ .... （12 分）

下面证明方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 只有两个实根.

用反证法. 假设方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有三个实根，不妨设为 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3$. 对 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 和 $[x_2,x_3]$ 上分别应用洛尔定理，则各至少存在一点 ξ_1（$x_1<\xi_1<x_2$）和 ξ_2（$x_2<\xi_2<x_3$），使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$. 再将 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上使用洛尔定理，则至少存在一点 $\eta(\xi_1<\eta<\xi_2)$，使 $f''(\eta)=0$. 此与条件 $f''(x)>0$ 矛盾. 从而方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不能多于两个根. ....（15 分）

证 2. 先证方程 $f(x)=0$ 至少有两个实根.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$，必有一个充分大的 $a>x_0$，使得 $f'(a)>0$.

因 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，故 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 均连续. 由拉格朗日中值定理，对于 $x>a$ 有

$$f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)]=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)]$$

$$=f'(\xi)(x-a)-f'(a)(x-a)=[f'(\xi)-f'(a)](x-a)$$

$$=f''(\eta)(\xi-a)(x-a).$$

其中 $a<\xi<x,\quad a<\eta<x$. 注意到 $f''(\eta)>0$（因为 $f''(x)>0$），则

$$f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)\qquad(x>a)$$

又因 $f'(a)>0$，故存在 $b>a$，使得

$$f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)>0$$ ....（6 分）

又已知 $f(x_0)<0$，由连续函数的中间值定理，至少存在一点 $x_1(x_0<x_1<b)$ 使得

$f(x_1)=0$. 即方程 $f(x)=0$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上至少有一个根 x_1 ....（7 分）

同理可证方程 $f(\mathrm{x})=0$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上至少有一个根 x_2. ....（12 分）

下面证明方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 只有两个实根.（以下同证 1）.......（15 分）

三（本题共 15 分）、设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定. 且 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}du+\dfrac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切. 求函数 $\psi(t)$.

解 因为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{2+2t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{2+2t}\cdot\dfrac{(2+2t)\psi''(t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^2}=\dfrac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}$，

..................（3 分）

由题设 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，故 $\dfrac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，从而

$(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)=3(1+t)^2$，即 $\psi''(t)-\dfrac{1}{1+t}\psi'(t)=3(1+t)$.

设 $u=\psi'(t)$，则有 $u'-\dfrac{1}{1+t}u=3(1+t)$，

$$u=e^{\int\frac{1}{1+t}dt}\left[\int 3(1+t)e^{-\int\frac{1}{1+t}dt}dt+C_1\right]=(1+t)\left[\int 3(1+t)(1+t)^{-1}dt+C_1\right]=(1+t)(3t+C_1).$$

............（9 分）

由曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}du+\dfrac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切知 $\psi(1)=\dfrac{3}{2e}$，$\psi'(1)=\dfrac{2}{e}$. ....（11 分）

所以$u\big|_{t=1}=\psi'(1)=\dfrac{2}{e}$，知$C_1=\dfrac{1}{e}-3$.

$\psi(t)=\int(1+t)(3t+C_1)dt=\int(3t^2+(3+C_1)t+C_1)dt=t^3+\dfrac{3+C_1}{2}t^2+C_1t+C_2$，由$\psi(1)=\dfrac{3}{2e}$，知$C_2=2$，于是$\psi(t)=t^3+\dfrac{1}{2e}t^2+(\dfrac{1}{e}-3)t+2\ (t>-1)$. ...（15 分）

四（本题共 15 分）、设 $a_n>0,\ S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，证明：

（1）当$\alpha>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$收敛；

（2）当$\alpha\le1$，且$S_n\to\infty$（$n\to\infty$）时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$发散.

证明 令$f(x)=x^{1-\alpha},x\in[S_{n-1},S_n]$. 将$f(x)$在区间$[S_{n-1},S_n]$上用拉格朗日中值定理，

存在$\xi\in(S_{n-1},S_n)$

$$f(S_n)-f(S_{n-1})=f'(\xi)(S_n-S_{n-1})$$

即$S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha}=(1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n$ ....（5 分）

（1）当$\alpha>1$时，$\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{S_n^{\alpha-1}}=(\alpha-1)\dfrac{a_n}{\xi^\alpha}\ge(\alpha-1)\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$. 显然$\left\{\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right\}$的前 n 项和有界，从而收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$收敛. ....（8 分）

（2）当$\alpha=1$时，因为$a_n>0$，S_n单调递增，所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\ge\frac{1}{S_{n+p}}\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}$$

因为$S_n\to+\infty$对任意 n，当$p\in\mathbb{N}$ $\dfrac{S_n}{S_{n+p}}<\dfrac{1}{2}$，从而$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\dfrac{a_k}{S_k}\ge\dfrac{1}{2}$. 所以级数

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散. ....（12 分）

当$\alpha<1$时，$\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}\ge\dfrac{a_n}{S_n}$. 由$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$发散及比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$发散.........（15 分）

五（本题共 15 分）、设 l 是过原点，方向为(α,β,γ)（其中$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$）的直线，均匀椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$（其中 $0<c<b<a$ ，密度为 1）绕 l 旋转.

(1) 求其转动惯量；(2) 求其转动惯量关于方向(α,β,γ)的最大值和最小值.

解 (1) 设旋转轴 l 的方向向量为$\mathbf{l}=(\alpha,\beta,\gamma)$，椭球内任意一点 P$(x,y,z)$的径向量为$\mathbf{r}$，则点 P 到旋转轴 l 的距离的平方为

$$d^2=\mathbf{r}^2-(\mathbf{r}\cdot\mathbf{l})^2=(1-\alpha^2)x^2+(1-\beta^2)y^2+(1-\gamma^2)z^2-2\alpha\beta xy-2\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz$$

由积分区域的对称性可知

$$\iiint_\Omega(2\alpha\beta xy+2\beta\gamma yz+2\alpha\gamma xz)dxdydz=0\text{, 其中}\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right.\right\}$$

..................（2 分）

而$\iiint_\Omega x^2dxdydz=\int_{-a}^{a}x^2dx\iint_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1-\frac{x^2}{a^2}}dydz=\int_{-a}^{a}x^2\cdot\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4a^3bc\pi}{15}$

（或$\iiint_\Omega x^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{1}a^2r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot abcr^2\sin\varphi dr=\frac{4a^3bc\pi}{15}$）

$\iiint_\Omega y^2dxdydz=\frac{4ab^3c\pi}{15}$，$\iiint_\Omega z^2dxdydz=\frac{4abc^3\pi}{15}$ ....（5 分）

由转到惯量的定义

$J_l=\iiint_\Omega d^2dxdydz=\frac{4abc\pi}{15}\left((1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2\right)$..............（6 分）

(2) 考虑目标函数 $V(\alpha,\beta,\gamma)=(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2$ 在约束 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ 下的条件极值.

设拉格朗日函数为

$$L(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2+\lambda(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1)$$

.....................（8 分）

令 $L_\alpha=2\alpha(\lambda-a^2)=0$，$L_\beta=2\beta(\lambda-b^2)=0$，$L_\gamma=2\gamma(\lambda-c^2)=0$，

$L_\lambda=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1=0$

解得极值点为$Q_1(\pm1,0,0,a^2)$，$Q_2(0,\pm1,0,b^2)$，$Q_3(0,0,\pm1,c^2)$ ....（12 分）

比较可知，绕 z 轴（短轴）的转动惯量最大，为$J_{\max}=\dfrac{4abc\pi}{15}\left(a^2+b^2\right)$；绕 x 轴（长轴）的转动惯量最小，为$J_{\min}=\dfrac{4abc\pi}{15}\left(b^2+c^2\right)$. ....（15 分）

六（本题共 15 分）、设函数$\varphi(x)$具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上，曲线积分$\oint_C \dfrac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$的值为常数.

(1) 设L为正向闭曲线$(x-2)^2+y^2=1$. 证明: $\oint_L \dfrac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0$；

(2) 求函数$\varphi(x)$；

(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求$\oint_C \dfrac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$.

解 (1) 设$\oint_L \dfrac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=I$，闭曲线 L 由 $L_i, i=1,2$ 组成. 设L_0为不经过原点的光滑曲线，使得$L_0\cup L_1^-$（其中L_1^-为L_1的反向曲线）和$L_0\cup L_2$分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线$C_i, i=1,2$. 由曲线积分的性质和题设条件

$$\oint_L \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\int_{L_1}+\int_{L_2}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\int_{L_2}+\int_{L_0}-\int_{L_0}-\int_{L_1^-}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$$

$$=\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=I-I=0$$ ....（5 分）

(2) 设$P(x,y)=\dfrac{2xy}{x^4+y^2}, Q(x,y)=\dfrac{\varphi(x)}{x^4+y^2}$.

令 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即 $\dfrac{\varphi'(x)(x^4+y^2)-4x^3\varphi(x)}{(x^4+y^2)^2}=\dfrac{2x^5-2xy^2}{(x^4+y^2)^2}$，解得

$\varphi(x)=-x^2$ ....（10 分）

(3) 设 D 为正向闭曲线$C_a: x^4+y^2=1$所围区域，由(1)

$$\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2} = \oint_{C_a} \frac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2}$$ ………………（12 分）

利用 Green 公式和对称性，

$$\oint_{C_a} \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2} = \oint_{C_a} 2xydx-x^2dy = \iint_D (-4x)dxdy = 0$$ ………………（15 分）