

2013 年研究生入学考试数学三试题及解析

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时，用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是 ()

(A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$ (B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$

(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$ (D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

【分析】 本题利用无穷小的运算性质求解。

【详解】 由无穷小的性质可知应选 (D)。事实上， $o(x) + o(x^2) = o(x)$ 。

(2) 函数 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 ()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【分析】 先求出可能的间断点，然后利用可去间断点的定义判断。

【详解】 $f(x)$ 在 $x=0, x=\pm 1$ 无定义，

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x(x+1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x(x+1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x(x+1)\ln x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)^x - 1}{x(x+1)\ln(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln(-x)} - 1}{x(x+1)\ln(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(-x)}{x(x+1)\ln(-x)} = 1,$$

所以 $x=0$ 是可去间断点；

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^x - 1}{x(x+1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x(x+1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{x(x+1)\ln x} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^x - 1}{x(x+1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x(x+1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x(x+1)\ln x} = \frac{1}{2},$$

所以 $x=1$ 是可去间断点。

$$(3) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(-x)^x - 1}{x(x+1)\ln(-x)} \\ = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^{x \ln(-x)} - 1}{x(x+1)\ln(-x)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x \ln(-x)}{x(x+1)\ln(-x)} = +\infty,$$

所以 $x = -1$ 不是可去间断点。

综上, $f(x)$ 的可去间断点的个数为 2, 故选 (C)。

【注】类似例题见《数学复习指南》(经济类) 第一篇【例 1.64】。

(3) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 位于第 k 象限的部分, 记

$$I_k = \iint_{D_k} (y - x) dx dy \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

则 ()

(A) $I_1 > 0$ (B) $I_2 > 0$ (C) $I_3 > 0$ (D) $I_4 > 0$

【分析】联合图形求解。

【详解】 $I_k = \iint_{D_k} (y - x) dx dy = \iint_{D_k} r^2 (\sin \theta - \cos \theta) dr d\theta,$

由图形可知, 仅在第 2 象限, 有 $\sin \theta - \cos \theta > 0$, 所以 $I_2 > 0$, 故选 (B)。

【注】类似例题见《数学复习指南》(经济类) 第一篇【例 10.1】。

(4) 设 $\{a_n\}$ 为正项数列, 下列选项正确的是 ()

(A) 若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛 (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在

(D) 若存在常数 $p > 1$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

【详解】由于 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ 存在, 利用正项级数的比较判

别法可直接选 (D)。

(5) 设矩阵 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 且 B 可逆, 则 ()

- (A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
- (B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
- (C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
- (D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

【分析】由 $AB = C \Rightarrow A = CB^{-1}$ 。

【详解】设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), C = (c_1, c_2, \dots, c_n), B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$,

则由 $AB = C$ 可得

$$c_j = \alpha_1 b_{1j} + \alpha_2 b_{2j} + \cdots + \alpha_n b_{nj} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

则 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出。

由 $AB = C \Rightarrow A = CB^{-1}$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可由 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 线性表出,

故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 等价, 即选 (B)。

(6) 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件为 ()

(A) $a = 0, b = 2$ (B) $a = 0, b$ 为任意常数

(C) $a = 2, b = 0$ (D) $a = 2, b$ 为任意常数

【详解】若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ 为实对称矩阵, 则其可相似对角化。令其特征方程

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ 0 & \lambda - b & -a \\ -\lambda & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ 0 & \lambda - b & -a \\ 0 & -2a & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda [\lambda^2 - (b+2)\lambda + 2b - 2a^2] \end{aligned}$$

设 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则其特征方程为

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda [\lambda^2 - (2+b)\lambda + 2b],$$

若两矩阵相似, 则有 $2b - 2a^2 = 2b \Rightarrow a = 0$,

反之, 若 $a = 0$, 则有 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B| = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - b)$, 因为两个矩阵都为

实对称矩阵, 均与 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似, 所以两矩阵相似。

故选 (B)。

【注】类似例题见《数学复习指南》(经济类) 第二篇【例 5.10】。

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2)$,

$P_j = P\{-2 \leq X_j \leq 2\} (j=1, 2, 3)$, 则 ()

(A) $P_1 > P_2 > P_3$ (B) $P_2 > P_1 > P_3$ (C) $P_3 > P_1 > P_2$ (D) $P_1 > P_3 > P_2$

【分析】本题为概率的比较, 因为随机变量服从正态分布, 标准化后逐个计算。由题设可知, $X_1 \sim N(0, 1), \frac{X_2}{2} \sim N(0, 1), \frac{X_3 - 5}{3} \sim N(0, 1)$

【详解】 $P_1 = P\{-2 \leq X_1 \leq 2\} = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1$,

$$P_2 = P\{-2 \leq X_2 \leq 2\} = P\left\{-1 \leq \frac{X_2}{2} \leq 1\right\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1,$$

$$\begin{aligned} P_3 &= P\{-2 \leq X_3 \leq 2\} = P\left\{-\frac{7}{3} \leq \frac{X_3 - 5}{3} \leq -1\right\} \\ &= \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) = \Phi\left(\frac{7}{3}\right) - \Phi(1), \end{aligned}$$

显然, $P_1 > P_2 > P_3$, 故选 (A)。

【注】类似例题见《数学复习指南》(经济类) 第三篇【例 2.49】。

(8) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
-----	---	---	---	---

P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
-----	---------------	---------------	---------------	---------------

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\} =$

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{2}$

【详解】因为 X 和 Y 相互独立，所以

$$\begin{aligned}
 P\{X+Y=2\} &= P\{X=1, Y=1\} + P\{X=2, Y=0\} + P\{X=3, Y=-1\} \\
 &= P\{X=1\}P\{Y=1\} + P\{X=2\}P\{Y=0\} + P\{X=3\}P\{Y=-1\} \\
 &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},
 \end{aligned}$$

故选 (C)。

【注】类似例题见《数学复习指南》(经济类) 第三篇【例 2.41】。

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

(9) 设曲线 $y=f(x)$ 和 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共的切线，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right) =$ _____。

【分析】由曲线 $y=f(x)$ 和 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共的切线可得

$$f'(1) = (x^2 - x)' \Big|_{x=1} = 1, \quad f(1) = 0.$$

【详解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(1 - \frac{2}{n+2}\right) - f(1)}{\left(-\frac{2}{n+2}\right)\left(-\frac{n+2}{2}\right)\frac{1}{n}} = -2f'(1) = -2.$

(10) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x = xy$ 确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} =$ _____。

【分析】 $(z+y)^x = xy \Rightarrow e^{x \ln(z+y)} = xy$ 。当 $x=1, y=2 \Rightarrow z=0$ 。

【详解】上式两边对 x 求偏导得



$$e^{x \ln(z+y)} \left(\ln(z+y) + x \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z+y} \right) = y,$$

$$\Rightarrow (z+y)^x \left(\ln(z+y) + x \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z+y} \right) = y,$$

将 $x=1, y=2$ 代入上式可得,

$$2 \cdot \left(\ln 2 + \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)}}{2} \right) = 2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} = 2 - 2 \ln 2.$$

【注】类似例题见《数学复习指南》(经济类)第一篇【例 9.29】.

(11) 求 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【分析】对于边界点为无穷的反常积分, 可以利用定积分直接计算。

【详解】 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = -\int_1^{+\infty} \ln x d \frac{1}{1+x} = -\frac{\ln x}{1+x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx = \ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^{+\infty} = \ln 2$$

【注】类似例题见《数学复习指南》(经济类)第一篇【例 4.50】.

(12) 微分方程 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$

【分析】本题求二阶线性齐次微分方程的通解, 利用特征方程求解。

【详解】 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 所应的特征方程为

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2},$$

则所求通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{1}{2}x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数。

【注】类似例题见《数学复习指南》(经济类)第一篇【例 6.13】 【例 6.14】.

(13) 设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若

$a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}.$

【分析】本题求抽象矩阵的行列式，利用性质求解，注意题中出现了代数余子式，要想到伴随矩阵 A^* 及结论 $AA^* = A^*A = |A|E$ 。

【详解】设 A^* 为 A 的伴随矩阵，则由

$$a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3) \Rightarrow A + (A^*)^T = O \Rightarrow A^T + A^* = O,$$

$$\text{于是 } AA^T + AA^* = O \Rightarrow AA^* = -AA^T \Rightarrow |A|E = -AA^T,$$

$$\text{两边取行列式可得 } |A|^3 = -|A|^2 \Rightarrow |A| = -1 \text{ 或 } 0.$$

$$\text{若 } |A| = 0 \Rightarrow AA^T = O \Rightarrow A = O, \text{ 而 } A \text{ 是非零矩阵, 所以矛盾, 故 } |A| = -1.$$

【评注】本题中涉及到了矩阵和行列式的性质。

(14) 设随机变量 X 服从标准正态分布，即 $X \sim N(0, 1)$ ，则 $E(Xe^{2X}) =$ _____。

【分析】利用定义求解。

【详解】标准正态分布的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty,$$

所以

$$\begin{aligned} E(Xe^{2X}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} + 2x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2} + 2} dx = e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx \\ &\stackrel{u=x-2}{=} e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (u+2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du + 2e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= 0 + 2e^2 = 2e^2. \end{aligned}$$

【注】类似例题见《数学复习指南》(经济类) 第三篇【例 3.14】。

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

当 $x \rightarrow 0$ 时， $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 和 a 的值。



【分析】本题已知等价无穷小，反求参数，可利用洛必达法则求解。

【详解】 $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = 1 - (\cos x \cos 3x) \cos 2x$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) \cos 2x \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x). \end{aligned}$$

由题设可得

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x)}{ax^n} \\ &\stackrel{\text{洛}}{=} \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x + 4 \sin 4x + 6 \sin 6x}{nax^{n-1}} \\ &\stackrel{\text{洛}}{=} \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 2x + 16 \cos 4x + 36 \cos 6x}{n(n-1)ax^{n-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{14}{n(n-1)ax^{n-2}}, \end{aligned}$$

所以 $n = 2, a = 7$ 。

【注】类似例题见《数学复习指南》（经济类）第一篇【例 1.60】。

(16) (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$ ，直线 $x = a$ ($a > 0$) 及 x 轴所围成的平面图形， V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴， y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y = 10V_x$ ，求 a 的值。

【分析】直接利用平面图形绕坐标轴旋转所得旋转体的体积公式求解。

【详解】利用公式直接可得

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3\pi a^{\frac{5}{3}}}{5}, \\ V_y &= 2\pi \int_0^a xy dx = 2\pi \int_0^a x^{\frac{4}{3}} dx = \frac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}, \end{aligned}$$

$$\text{若 } V_y = 10V_x, \text{ 则有 } \frac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7} = 10 \times \frac{3\pi a^{\frac{5}{3}}}{5} \Rightarrow a^{\frac{2}{3}} = 7 \Rightarrow a = 7\sqrt{7}.$$

【注】类似例题见《数学复习指南》（经济类）第一篇【例 7.33】 【例 7.34】。

(17) (本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=3y, y=3x, x+y=8$ 围成, 求 $\iint_D x^2 dx dy$ 。

【分析】本题计算二重积分。先画出草图, 确定积分限, 然后再求解。

【详解】 $x=3y$ 与 $x+y=8$ 的交点为 $(6, 2)$,

$y=3x$ 与 $x+y=8$ 的交点为 $(2, 6)$,

显然在该区域内直线 $y=3x$ 和直线 $x+y=8$ 都位于 $x=3y$ 的上方, 所以

$$\iint_D x^2 dx dy = \int_0^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{3}x}^{3x} dy + \int_2^6 x^2 dx \int_{\frac{1}{3}x}^{8-x} dy = \frac{32}{3} + 128 = 138\frac{2}{3}$$

【注】类似例题见《数学复习指南》(经济类) 第一篇【例 5.15】 【例 5.17】..

(18) (本题满分 10 分)

设生产某产品的固定成本为 6000 元, 可变成本为 20 元/件, 价格函数为 $P = 60 - \frac{Q}{1000}$,

(P 是单价, 单位: 元, Q 是销量, 单位: 件), 已知产销平衡, 求:

(I) 该商品的边际利润;

(II) 当 $P=50$ 时的边际利润, 并解释其经济意义;

(III) 使得利润最大的定价 P 。

【分析】本题考查微积分在经济中的应用。

【详解】(I) 利润为 $L = QP - 20Q - 6000$

$$= Q \left(60 - \frac{Q}{1000} \right) - 20Q - 6000 = Q \left(40 - \frac{Q}{1000} \right) - 6000,$$

$$\text{于是边际利润 } \frac{dL}{dQ} = 40 - \frac{Q}{500};$$

(II) 当 $P=50$ 时, $Q=10000$, 此时边际利润为 $\left. \frac{dL}{dQ} \right|_{Q=10000} = 20$,

经济意义为: 当 $P=50$ 时, 增加 1 件销售量, 利润增加 20 元。

(III) 令 $\frac{dL}{dQ} = 40 - \frac{Q}{500} = 0 \Rightarrow Q = 20000$, 此时 $P = 40$ 。

$$\frac{d^2L}{dQ^2} = -\frac{1}{500} < 0, \text{ 所以 } P = 40 \text{ 时, 利润最大.}$$

【注】类似例题见《数学复习指南》(经济类) 第一篇【例 12.1】 【例 12.2】.

(19) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0)=0$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=2$, 证明:

(I) 存在 $a > 0$, 使得 $f(a)=1$;

(II) 对 (I) 中的 a , 存在 $\xi \in (0, a)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{1}{a}$ 。

【详解】(I) 作辅助函数 $F(x) = f(x) - 1$ 。

由函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导可得函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 由

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ 可知存在 $b > 0$, 使得 $f(b) = \frac{3}{2}$, 于是

$$F(0) = f(0) - 1 = -1, F(b) = f(b) - 1 = \frac{1}{2}, \text{ 则 } F(0)F(b) < 0, \text{ 于是由}$$

零值定理可得存在 $a \in (0, b)$, 使得 $F(a) = f(a) - 1 = 0$, 即 $f(a) = 1$;

(II) 作辅助函数 $g(x) = f(x) - \frac{x}{a}$, 则有

$$g(0) = f(0) - 0 = 0, g(a) = f(a) - \frac{a}{a} = 0, \text{ 对 } g(x) \text{ 在 } [0, a] \text{ 上应用罗尔定理}$$

可知, 存在 $\xi \in (0, a)$, 使得 $g'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = \frac{1}{a}$ 。

【注】类似例题见《数学复习指南》(经济类) 第一篇【例 5.5】 【例 5.15】。

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C , 使得 $AC - CA = B$, 并求

所有矩阵 C 。

【详解】设 $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$, 于是

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + ac_3 & c_2 + ac_4 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix},$$

$$CA = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & ac_1 \\ c_3 + c_4 & ac_3 \end{bmatrix},$$

令 $AC - CA = B$, 则有



$$\begin{cases} ac_3 - c_2 = 0 \\ c_2 + ac_4 - ac_1 = 1 \\ c_1 - (c_3 + c_4) = 1 \\ c_2 - ac_3 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac_3 - c_2 = 0 \\ -a(c_1 - c_3 - c_4) = 1 \\ c_1 - c_3 - c_4 = 1 \\ c_2 - ac_3 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}.$$

于是有

$$\begin{cases} c_2 = -c_3 \\ c_1 = 1 + c_3 + c_4 \end{cases}, \text{ 则 } C = \begin{bmatrix} 1 + c_3 + c_4 & -c_3 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } c_3, c_4 \text{ 为任意常数.}$$

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明二次型 f 在正交变换下的标准形为二次型 $2y_1^2 + y_2^2$.

【详解】(I) 令 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, 则

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 \\ &= 2x^T\alpha\alpha^Tx + x^T\beta\beta^Tx = x^T(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)x, \end{aligned}$$

$$\text{又 } (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)^T = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T,$$

所以二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$.

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 则有 $\beta^T\alpha = \alpha^T\beta = 0$, $\alpha^T\alpha = \beta^T\beta = E$,

令 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, 则

$$A\alpha = 2\alpha\alpha^T\alpha + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha, A\beta = 2\alpha\alpha^T\beta + \beta\beta^T\beta = \beta,$$

所以 A 的特征值为 2, 1, 又 $A^T = A$, 所以二次型 f 在正交变换下的标准形为二次型 $2y_1^2 + y_2^2$ 。

【注】类似例题见《数学复习指南》(经济类) 第二篇【例 6.5】

(22) (本题满分 11 分)

设 (X, Y) 是二维随机变量, X 的边缘概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 在给定 $X = x (0 < x < 1)$ 的条件下, Y 的条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

(I) 求 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$;

(II) 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$ 。

【详解】(I) $f(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{9y^2}{x}, & 0 < x < 1, 0 < y < x; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$;

(II) Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y) = \int_y^1 f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 \frac{9y^2}{x} dx = -9y^2 \ln y, & 0 < y < 1. \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

【注】类似例题见《数学复习指南》(经济类) 第三篇【例 2.36】。

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 其中 θ 为未知参数且大于零,

$X_1, X_2, \dots, X_N$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量。

【详解】(I) $EX = \int_0^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^{+\infty} x \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta}{x}} d\left(-\frac{\theta}{x}\right) = \theta e^{-\frac{\theta}{x}} \Big|_0^{+\infty} = \theta$,



令 $\bar{X} = EX \Rightarrow \bar{X} = \theta \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{X}$ 为 θ 的矩估计量;

(II) 对于总体 X 的样本值 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{2n}}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^3} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{\theta}{x_i}}, & x_i > 0 (i=1, 2, \dots, n), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

于是

$$\ln L(\theta) = \begin{cases} 2n \ln \theta + 3 \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}, & x_i > 0 (i=1, 2, \dots, n), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

上式对 θ 求导得

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \begin{cases} \frac{2n}{\theta} \ln \theta - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}, & x_i > 0 (i=1, 2, \dots, n), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}},$$

所以 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}.$$

【注】类似例题见《数学复习指南》(经济类) 第三篇【例 6.4】 【例 6.7】.